Méthodes de résolution numérique d'équations



Fonctions réciproques

1- *Bijection et bijection réciproque*

Définition Soient A et B deux ensembles, et $f : A \to B$ une fonction dont l'ensemble de définition est $\mathcal{D}_f = A$. On dit que f est une bijection lorsque pour tout élément b de l'ensemble d'arrivée B, il existe un unique élément a dans l'ensemble de départ A tel que $f(a) = b$.

Exemple *La fonction affine $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = mx + p$ est une bijection lorsque $m \neq 0$. En effet pour tout $b \in \mathbb{R}$, l'équation $f(a) = b$ admet une unique solution $a = \dfrac{b-p}{m}$.*

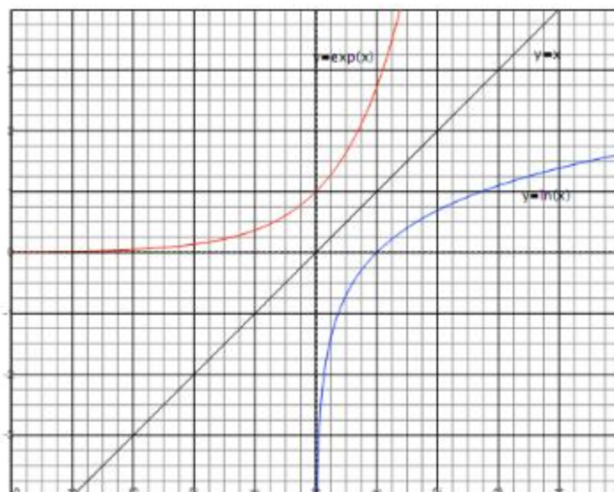
Définition Soient A et B deux ensembles, et $f : A \to B$ une bijection. On appelle bijection réciproque de f la fonction qui à b dans B associe l'unique a de A tel que $f(a) = b$. Cette fonction est notée $f^{-1} : B \to A$. C'est aussi une bijection.

Exemple *On a vu (plutôt : on a admis) que la fonction $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ donnée par $f(x) = e^x$ est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction qui a $b \in]0, +\infty[$ associe l'unique $a \in \mathbb{R}$ tel que $e^a = b$. C'est donc la fonction $f^{-1} :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ donnée par $f^{-1}(b) = \ln b$.*

On suppose maintenant que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une bijection, dont $\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.



Proposition *La courbe représentative de la bijection réciproque f^{-1} est la courbe symétrique de C_f par rapport à la droite $D : y = x$ (la première bissectrice).*



2- Cas des fonctions régulières

Rappelons que, d'après le T.V.I, l'image d'un intervalle I par une fonction continue sur I est un intervalle J. De ce fait, on a immédiatement la première partie de la

> **Proposition** *Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On note J l'intervalle $f(I)$. Si f est strictement monotone, alors $f : I \longrightarrow J$ est une bijection. De plus la bijection réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow I$ est aussi continue et strictement monotone, de même monotonie que f.*

Ce résultat permet de justifier les affirmations des exemples précédents ! La continuité de la bijection réciproque est plus difficile à démontrer, et nous l'admettrons.

On suppose maintenant que f est une fonction continue et dérivable sur I, et que f est strictement monotone sur I. On a vu qu'il suffit pour cela que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, mais que ce n'est pas nécessaire ($f(x) = x^3 \ldots$). D'après la proposition précédente $f : I \to J$ est une bijection, et f^{-1} est continue. On a mieux :

> **Proposition** *Si f est une fonction continue, dérivable et f strictement monotone sur I. Si $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et son nombre dérivé en y_0 est donnée par*
>
> $$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

On peut comprendre (et même démontrer) cette formule en examinant simultanément la courbe représentative de f et celle de f^{-1} : si $m \neq 0$ est le coefficient directeur de la tangente $\mathcal{T}$ à C_f en x_0, le coefficient directeur de la droite symétrique de $\mathcal{T}$ par rapport à Δ est $1/m$.

Méthode de dichotomie (Méthodes de résolution numérique d'équations)



On veut résoudre l'équation f'(x) = 0, pour une fonction f donnée. Plus précisément, on suppose que l'on sait que cette équation admet une unique solution x0 dans l'intervalle [a, b], et l'on cherche à déterminer une valeur approchée de x0 avec une précision fixée à l'avance.

La méthode de dichotomie permet cela, et ne repose que sur un seul des résultats vus dans le chapitre précédent : le théorème des valeurs intermédiaires. Autrement dit, la seule hypothèse nécessaire pour la mettre en oeuvre est :

f est continue sur l'intervalle [a, b].

Dans ce cadre, une façon simple d'assurer que l'équation f(x) = 0 ait une solution dans [a, b] est de supposer que f(a) et f(b) sont de signe contraires. Pour simplifier la discussion qui va suivre, on supposera même

f(a) < 0 < f(b).

Répétons-le, le Théorème des Valeurs Intermédiaires permet d'affirmer que l'équation f(x) = 0

admet au moins une solution dans]a, b[, mais rien ne dit qu'elle est unique : nous ferons cette hypothèse.

L'idée de la méthode est très simple : on coupe l'intervalle [a, b] en deux parties de même longueur [a, c] et [c, b] Où c = (a+b) /2 est le milieu de [a, b], et l'on cherche dans lequel de ces intervalles se trouve la solution x_0. Elle est dans [a, c] si f(c) ≥ 0, et dans [c, b] si f(c) ≤ 0 !

Le théorème qui suit montre que la répétition de ce raisonnement un assez grand nombre de fois conduit à une valeur approchée de x_0 avec n'importe quelle précision donnée à l'avance.

Proposition *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, avec $f(a)<0<f(b)$, et telle que l'équation $f(x)=0$ ait une seule solution dans $[a,b]$. Soient (a_n) et (b_n) les suites définies par $a_0=a$, $b_0=b$ et*

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n & \text{si } f(\frac{a_n+b_n}{2})>0,\\ \frac{a_n+b_n}{2} & \text{si } f(\frac{a_n+b_n}{2})\leq 0,\end{cases} \quad \text{et } b_{n+1}=\begin{cases} \frac{a_n+b_n}{2} & \text{si } f(\frac{a_n+b_n}{2})>0,\\ b_n & \text{si } f(\frac{a_n+b_n}{2})\leq 0.\end{cases}$$

Les suites (a_n) et (b_n) convergent vers x_0. De plus a_n (resp. b_n) est une valeur approchée de x_0 à $\epsilon=\frac{b-a}{2^n}$-près par défaut (resp. par excès).

Preuve: Pour ce qui est de la convergence, il suffit de remarquer que (a_n) et (b_n) sont des suites adjacentes : (a_n) est croissante, (b_n) est décroissante, et l'on voit facilement par récurrence que $b_n-a_n\leq\frac{b-a}{2^n}$, donc en particulier que $(b_n-a_n)\to 0$. Ainsi (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite ℓ. Supposons que $f(\ell)\neq 0$. Puisque f est continue en ℓ, f garde un signe constant au voisinage de ℓ, disons sur $]\ell-\delta,\ell+\delta[$. Soit alors $N\in\mathbb{N}$ tel que $(b-a)/2^N\leq\delta$. Puisque $\ell\in[a_N,b_N]$, on a $[a_N,b_N]\subset]\ell-\delta,\ell+\delta[$. Donc $f(a_N)$ et $f(b_N)$ sont de même signe, ce qui est absurde par construction. Ainsi on a bien $\ell=x_0$. La dernière assertion de la proposition découle directement du fait que $a_n\leq x_0<b_n$.

Cette méthode est tout à fait simple à programmer. Voilà l'algorithme correspondant :

```
[lire a,b,precision];
Tant que (b-a)>precision
{
c=(a+b)/2;
si (f(c).f(b)<0 a="c;<br" alors="alors">sinon b=c;
};
[afficher a];
```

Méthode du point fixe (Méthodes de résolution numérique d'équations)



1- Le théorème du point fixe

Définition : Soit f une fonction d´efinie sur D. On dit que x ∊ D est un point fixe de f lorsque f(x) = x.

> **Proposition** *Soit f une fonction de classe C^1 sur un intervalle fermé $I \subset \mathbb{R}$, telle que $f(I) \subset I$, et (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour un $u_0 \in I$ donné. S'il existe un réel $0 \leq k < 1$ tel que $|f'(x)| \leq k < 1$, alors la suite (u_n) converge vers un réel ℓ, qui est le seul point fixe de f sur I. De plus*
>
> $$|\ell - u_n| \leq k^n |\ell - u_0|.$$

Preuve: Supposons d'abord que f admette deux points fixes x_1 et x_2 distincts dans I. On aurait

$$|x_1 - x_2| = |f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2| < |x_1 - x_2|,$$

ce qui est absurde. Donc f admet au plus un point fixe dans I.

On va montrer maintenant que (u_n) est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$, et donc qu'elle converge. Pour $n \geq 1$ on écrit $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - f(u_{n-1})$. On applique le théorème des accroissements finis sur l'intervalle d'extrémités u_n et u_{n-1} : cet intervalle est inclus dans I, donc f y est C^1, et il existe $c \in I$ tel que $u_{n+1} - u_n = (u_n - u_{n-1})f'(c)$. On a donc

$$|u_{n+1} - u_n| \leq k|u_n - u_{n-1}|,$$

et par récurrence, on obtient

$$|u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|.$$

Soit maintenant $p \geq q$ deux entiers, et $m = p - q$, on a

$$|u_p - u_q| = |u_{q+m} - u_q| \leq |u_{q+m} - u_{q+m-1}| + |u_{q+m-1} - u_{q+m-2}| + \cdots + |u_{q+1} - u_q|,$$

et donc



$$|u_p - u_q| \leq (k^{q+m-1} + k^{q+m-2} + \cdots + k^q)|u_1 - u_0|.$$

Or $k^{q+m-1} + k^{q+m-2} + \cdots + k^q = k^q(1 + \cdots + k^{m-1}) = k^q \frac{1-k^m}{1-k}$, donc

$$|u_p - u_q| \leq \frac{k^q}{1-k}|u_1 - u_0|.$$

Puisque $0 \leq k < 1$, on a $\lim_{q\to+\infty} k^q = 0$, donc pour $\epsilon > 0$, il existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{k^q}{1-k}|u_1 - u_0| \leq \epsilon$ pour tout $q \geq N_\epsilon$. Finalement, on a $|u_p - u_q| \leq \epsilon$ pour tout $p \geq q \geq N_\epsilon$: la suite (u_n) est une suite de Cauchy, et converge donc vers un réel $\ell \in I$. En passant à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$, et grâce à la continuité de f, on obtient bien $f(\ell) = \ell$. Pour ce qui est de la dernière inégalité, on a

$$|u_n - \ell| = |f(u_{n-1}) - f(\ell)| \leq k|u_{n-1} - \ell|$$

et le résultat découle d'une récurrence facile.

Attention ! ça ne marche pas si l'on suppose seulement que $|f'(x)| \leq 1$. Considérer par exemple la fonction $f : [1, +\infty[\to [1, +\infty[$ définie par $f(x) = x + \frac{1}{x}$. La fonction f n'admet pas de point fixe : $f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 0$. Pourtant $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, donc $|f'(x)| \leq 1$ sur $[1, +\infty[$.

2- Points fixes attractifs et points fixes répulsifs

On se pose maintenant la question suivante : si α est un point fixe de f, peut-on obtenir une valeur approchée de α à partir d'une suite définie par la formule de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Autrement dit, peut-on trouver un intervalle I contenant α, stable par f et tel que f' vérifie une inégalité du type $|f'(x)| \leq k < 1$ sur I.

Définition Soit f une fonction C^1 sur $\mathbb{R}$, et α un point fixe de f. On dit que α est un point fixe attractif si $|f'(\alpha)| < 1$. On dit que α est un point fixe répulsif si $|f'(\alpha)| > 1$.

Exemple *Soit $f(x) = \frac{1}{4}(x^3 + 1)$. En établissant son tableau de variations, on voit que f admet trois points fixes $a_1 < a_2 < a_3$. Le Théorème des Valeurs Intermédiaires permet de montrer que $-2,5 < a_1 < 2$, $0 < a_2 < 0,5$ et $1,5 < a_3 < 2$. L'étude du sens de variation de f' permet de conclure que a_1 et a_3 sont des points fixes répulsifs, alors que a_2 est un point fixe attractif.*

- Supposons que α soit un point fixe attractif. Puisque f' est continue, il existe $h > 0$ tel que, pour tout $x \in [\alpha - h, \alpha + h]$, on a $|f'(x)| \leq k < 1$, où par exemple $k = \frac{1+f'(\alpha)}{2}$. L'intervalle $I = [\alpha - h, \alpha + h]$ est stable pour f : si $x \in I$, le TAF appliqué sur l'intervalle d'extrémités x et α donne

$$|f(x) - \alpha| = |f(x) - f(\alpha)| \leq k|x - \alpha| \leq kh < h,$$

et donc $f(x) \in I$. On a démontré la

Proposition *Si α est un point fixe attractif de f, il existe $h > 0$ tel que, pout tout $u_0 \in [\alpha - h, \alpha + h]$, la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers α.*

• Maintenant si α est un point fixe répulsif de f, on aura $|f'(x)| > 1$ sur un voisinage I de α, et l'on ne pourra pas utiliser directement la méthode du point fixe pour obtenir une valeur approchée de α. Il est cependant parfois possible de l'utiliser, disons dans le cas où l'on dispose d'une expression "explicite" pour f^{-1}. En effet puisque $|f'(x)| > 1$ sur I, et puisque f' est continue sur I, on a ou bien $f'(x) > 1$ pour tout x de I, ou bien $f'(x) < -1$ pour tout x de I. En particulier f est strictement monotone sur I, et puisqu'elle y est continue, f est bijective de I sur $J = f(I)$. Il suffit alors de remarquer que α est automatiquement un point fixe attractif pour f^{-1} : on a en effet $f^{-1}(\alpha) = \alpha$, et $|(f^{-1})'(\alpha)| < 1$ puisque $(f^{-1})'(\alpha) = 1/f'(\alpha)$.

Dans le cas de la fonction $f(x) = \frac{1}{4}(x^3 + 1)$ par exemple, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une bijection, et on a $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{4x - 1}$: on peut trouver une valeur approchée de a_1 (ou de a_2) en utilisant la méthode du point fixe pour f^{-1}... à condition de disposer d'un moyen de calculer la racine cubique d'un réel.

• Il reste à considérer le cas des points fixes α qui ne sont ni attractifs, ni répulsifs, c'est à dire pour lesquels $|f'(\alpha)| = 1$. Dans ce cas, la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ peut converger ou diverger, et ce même pour une donnée initiale arbitrairement proche de α.

Par exemple 0 est un point fixe de $f(x) = \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, et $f'(0) = \cosh(0) = 1$. Pour tout $u_0 > 0$, la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ est strictement croissante, donc ne peut pas converger vers 0 (en fait elle tend vers $+\infty$). Par contre 0 est aussi un point fixe de $g(x) = \sin x$, mais la suite $u_{n+1} = g(u_n)$ converge vers 0 pourvu que u_0 soit pris assez proche de 0 ($|u_0| \leq \pi/2$ suffit).

3- Algorithme

On suppose que α est un point fixe attractif de f, que f vérifie les hypothèses du Théorème du Point Fixe sur un intervalle I contenant α. On prend $u_0 \in I$ et on calcule les itérés successifs $u_1 = f(u_0)$, $f(f(u_0))$, $f(f(f(u_0)))\ldots$ Quand peut-on s'arrêter ? On peut bien sûr estimer la constante $k < 1$ telle que $|f'(x)| < k$ sur I, et si l'on veut obtenir une valeur approchée à ϵ près, itérer N fois, où N est tel que (cf. le Théorème du Point Fixe)

$$k^N|I| < \epsilon,$$

où $|I|$ désigne la longueur de l'intervalle I. La détermination de k et N peut cependant être longue ou difficile, et l'on se contente plutôt de s'arrêter lorsque la distance entre deux itérés successifs est inférieure à ϵ/M, où M est choisi assez grand ($M = 10, 100\ldots$). On peut en effet écrire

$$|u_n - \ell| \leq |u_{n+1} - u_n| + |u_{n+1} - \ell| \leq |u_{n+1} - u_n| + k|u_n - \ell|,$$

et on aura donc

$$|u_n - \ell| \leq \frac{1}{1-k}|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{\epsilon}{M(1-k)}.$$

On comprend que plus k est proche de 1, plus M doit être grand pour donner la précision attendue. Voilà un algorithme possible :

```
[lire x, precision];
M=10; /* l'algorithme donnera la pr´ecision attendue pour k<9 br="br">y=x+1;
Tant que (abs(y-x)>precision/M)
{
y=x;
x=f(x);
};
[afficher x];
```

Méthode de Newton (Méthodes de résolution numérique d'équations)

On va utiliser une méthode de point fixe pour résoudre l'équation $f(x) = 0$. On suppose toujours que α est l'unique solution de cette équation dans un intervalle I donné. On va

simplement exhiber une fonction g dont α est un point fixe super-attractif, c'est-à dire telle que $g(\alpha) = \alpha$ et $g'(\alpha) = 0$.

Historiquement, ce n'est pas ainsi qu'a été pensée la méthode. L'idée, attribuée à Isaac Newton, est de remplacer la courbe représentative de f par sa tangente. Plus précisément, partant d'une valeur approchée u_0 de α, on trace le point d'intersection de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse α et de l'axe des abscisses. Si cette tangente n'est pas horizontale, c'est-à-dire $f'(u_0) \neq 0$, on obtient un point M de coordonnées $M(u_1, 0)$ et un calcul simple montre que

$$u_1 = g(u_0) = u_0 - \frac{f(u_0)}{f'(u_0)}.$$

Ayant en tête la figure ci-dessous, on espère que u_1 est une meilleure approximation de α que u_0.

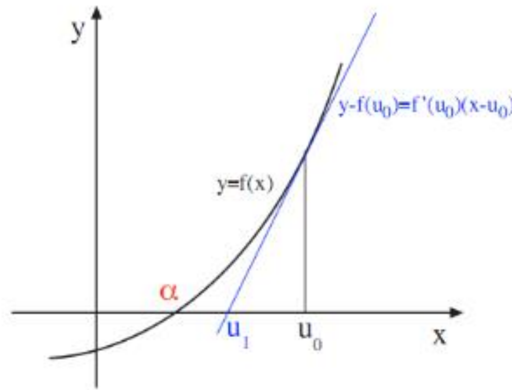




FIGURE – La méthode de Newton

La construction de Newton correspond bien à ce que nous avons annoncé. Il faut d'abord noter que si $f'(\alpha) \neq 0$, et puisque f' est continue, il existe un intervalle contenant α sur lequel f' ne s'annule pas. Dans ce cas, la fonction g définie par $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ est donc bien définie au voisinage de α. On a aussi $g(\alpha) = \alpha$, et on note que, si f est de classe $\mathcal{C}^2$,

$$g'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2},$$

ce qui montre que $g'(\alpha) = 0$. Par conséquent α est un point fixe attractif de g, et il existe un intervalle I contenant α sur lequel on peut utiliser la méthode du point fixe : pour un u_0 assez proche de α, la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = g(u_n)$ converge vers α.

Du fait que $g'(\alpha) = 0$, la suite (u_n) converge très vite vers α. Le résultat suivant montre que partant d'une valeur approchée à $0,1$ près, on obtient environ 2^n décimales exactes en n itérations.

Proposition *Soit f une fonction de classe C^2 sur l'intervalle $I = [\alpha - r, \alpha + r]$, où f' ne s'annule pas. On note*

$$M = \sup_{x \in I} \left| \frac{f''(x)}{f'(x)} \right| \quad \textit{et} \quad h = \min(r, 1/M).$$

Si $u_0 \in [\alpha - h, \alpha + h]$, et notant (u_n) la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = g(u_n)$, avec $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$, on a

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{M}(M|u_0 - \alpha|)^{2^n}$$

Par exemple pour $f(x) = x^3 - 4x + 1$, les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les points fixes a_1, a_2 et a_3 de la fonction $h : x \mapsto \frac{1}{4}(x^3 + 1)$ que nous avons déjà étudiés. Notant que ce sont des zéros simples de f, la méthode de Newton donne a_1, a_2 et a_3 comme points fixes de la fonction

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^3 - 4x + 1}{3x^2 - 4} = \frac{2x^3 - 1}{3x^2 - 4}.$$

Le lecteur pourra vérifier que pour obtenir une valeur approchée à 10^{-15} près de a_2 par exemple, il faut calculer une douzaine de termes de la suite (u_n) construite avec h, alors que 5 termes de la suite construite avec g suffisent. Avec la méthode de dichotomie, il faut environ 50 itérations.

Une dernière remarque : l'estimation ci-dessus montre que la convergence est moins bonne quand le nombre M est grand, c'est-à-dire quand $f'(x)$ est proche de 0 sur I, et $f''(x)$ est grand sur I. La méthode de Newton est donc particulièrement efficace lorsque la racine que l'on cherche se trouve dans une région où la pente est grande ($|f'(x)| >> 0$), et où elle ne varie pas beaucoup ($|f''(x)| << 1$). En particulier, cette méthode doit bien marcher... pour les droites qui ne sont pas horizontales !